

ZADANIE 9.5

Odległość Ziemi od słońca w peryhelium wynosi około 147 mln km, a odległość w aphelium jest równa 152 mln km. Szybkość Ziemi w aphelium to 29,3 km/s.

a) Oblicz szybkość Ziemi w peryhelium oraz różnicę szybkości w peryhelium i w aphelium.

b) Oszacuj z dokładnością do $1039 \frac{kg \cdot m^2}{s}$ wartość momentu pędu Ziemi na orbicie okołosłonecznej. Przyjmij, że masa Ziemi wynosi $6 \cdot 10^{24} kg$.

Dane:

$$r_p = 147 \text{ mln km}$$

$$r_a = 152 \text{ mln km}$$

$$v_a = 29,3 \frac{km}{s}$$

$$M = 6 \cdot 10^{24} kg$$

Szukane:

$$v_p = ?$$

$$v_p - v_a = ?$$

$$L = ?$$

a) Jeżeli planeta porusza się z największą szybkością to znajduje się najbliżej planety, a jeżeli z najmniejszą to najdalej. Planetę możemy potraktować jako masę punktową, czyli jej moment bezwładności ogólnie będzie miał postać:

$$I = m \cdot r^2$$

gdzie m jest planety, r jest jej odległością od gwiazdy wokół, której krąży. Zatem momenty bezwładności s Ziemi w aphelium i peryhelium będą wynosiły:

$$I_a = M \cdot r_a^2$$

$$I_p = M \cdot r_p^2$$

Szybkością kątową Ziemi w tych odległościach będą miały postać:

$$\omega_a = \frac{v_a}{r_a}$$

$$\omega_p = \frac{v_p}{r_p}$$

Zatem momenty pędu Ziemi w peryhelium i aphelium będą miały postać:

$$L_a = I_a \cdot \omega_a = M \cdot r_a^2 \cdot \frac{v_a}{r_a}$$

$$L_p = I_p \cdot \omega_p = M \cdot r_p^2 \cdot \frac{v_p}{r_p}$$

Korzystając z zasady zachowania momentu pędu wyznaczamy szybkość Ziemi w peryhelium w ruchu jej orbitalnym:

$$L_p = L_a$$

$$M \cdot r_p^2 \cdot \frac{v_p}{r_p} = M \cdot r_a^2 \cdot \frac{v_a}{r_a}$$

$$M \cdot r_p \cdot v_p = M \cdot r_a \cdot v_a$$

$$r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$$

$$v_p = \frac{r_a}{r_p} \cdot v_a$$

Podstawiamy do wzoru:

$$v_p = \frac{152 \text{ mln km}}{147 \text{ mln km}} \cdot 29,3 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 1,034 \cdot 29,3 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 30,2962 \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 30,3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Zatem różnica szybkości w peryhelium i aphelium wynosi:

$$v = v_p - v_a$$

$$v = 30,3 \frac{\text{km}}{\text{s}} - 29,3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v = 1 \frac{km}{s}$$

b) Moment pędu na orbicie jest stały. Obliczymy go korzystając z danych dla Ziemi znajdującej się w aphelium:

$$L = I \cdot \omega = M \cdot r^2 \cdot \frac{v}{r}$$

$$L = M \cdot r^2 \cdot v$$

Podstawiamy do wzoru:

$$\begin{aligned} L &= 6 \cdot 10^{24} kg \cdot 152 \text{ mln km} \cdot 29,3 \frac{km}{s} = \\ &= 6 \cdot 10^{24} kg \cdot 152 \cdot 10^6 km \cdot 29,3 \frac{km}{s} = \\ &= 6 \cdot 10^{24} kg \cdot 152 \cdot 10^6 \cdot 10^3 m \cdot 29,3 \cdot 10^3 \frac{m}{s} = \\ &= 6 \cdot 152 \cdot 29,3 \cdot 10^{24+6+3+3} \frac{kg \cdot m^2}{s} = \\ &= 26721,6 \cdot 10^{36} \frac{kg \cdot m^2}{s} = \\ &= 26721,6 \cdot 10^4 \cdot 10^{36} \frac{kg \cdot m^2}{s} \approx 2,7 \cdot 10^{40} \frac{kg \cdot m^2}{s} \end{aligned}$$