Zadanie 6.9 Na końcu poziomego pręta o masie 0,40 kg i długości 1,2 m usiadła papuga modrosara błękitna o masie 0,84 kg. Pręt wraz z papugą wprawiono w ruch obrotowy wokół pionowej osi, przechodzącej przez jego środek. Oblicz: a) ile razy zmaleje moment bezwładności pręta z papugą, jeśli ptak zbliży się do osi obrotu o 20 cm
b) początkową częstotliwość układu, jeśli po zmianie położenia papugi okres obrotu będzie równy 2 s
c) względny przyrost energii kinetycznej układu (wynik podaj w procentach)

Dane:

$m = 0,4\ kg$

$M = 0,84\ kg$

$l = 1,2\ m$

$x = 0,2\ m$

$T = 2\ s$

a) Oś obrotu przechodzi przez środek pręta o masie m i długości l, zatem moment bezwładności pręta wynosi: $I_{pr} = \frac{1}{12} ml^2$

• Papugę traktujemy jako masę punktową.
Jej początkowy moment bezwładności, gdy znajduje się na jednym z końców pręta, czyli w odległości $\frac{1}{2} l$ od osi obrotu ma postać:

$I_{pa.0} = M(\frac{1}{2} l)^2 = \frac{1}{4} Ml^2$

• Papuga zbliża się do osi obrotu o x. Wówczas jej moment bezwładności wynosi: $I_{pa} = M(\frac{1}{2} l - x)^2$

Korzystając z addytywności momentów bezwładności

$I_0 = I_{pr} + I_{pa.0}$

$I_0 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} Ml^2$

$I_0 = \frac{1}{12} l^2 (m + 3M)$

Początkowy moment bezwładności układu

$I = I_{pr} + I_{pa}$

$I = \frac{1}{12} ml^2 + M(\frac{1}{2} l - x)^2$ - końcowy moment bezw.

• Ile razy zmalał moment bezwładności po zbliżeniu się papugi do osi obrotu:

$$\frac{I_0}{I} = \frac{\frac{1}{12} l^2 (m+3M)}{\frac{1}{12} ml^2 + M(\frac{1}{2} l - x)^2} = \frac{l^2(m+3M)}{12 \cdot (\frac{1}{12} ml^2 + M(\frac{1}{2} l - x)^2)}$$

$$= \frac{l^2(m+3M)}{ml^2 + 12M(\frac{1}{2}l - x)^2} \xrightarrow{\text{Podstawiamy}} \frac{(1{,}2\,m)^2 \cdot (0{,}4\,kg + 3 \cdot 0{,}84\,kg)}{0{,}4\,kg \cdot (1{,}2\,m)^2 + 12 \cdot 0{,}84\,kg \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1{,}2\,m - 0{,}2\,m)^2} = \frac{1{,}44\,m^2 \cdot 3{,}22\,kg}{0{,}576\,kg \cdot m^2 + 11{,}28\,kg \cdot (0{,}4\,m)^2} =$$

$$= \frac{4{,}6368\,kg \cdot m^2}{0{,}576\,kg \cdot m^2 + 1{,}8048\,kg \cdot m^2} = \frac{4{,}6368\,kg \cdot m^2}{2{,}3808\,kg \cdot m^2} \approx$$

$$\approx 1{,}94758 \approx 2$$

Moment bezwładności zmiejszył się około 2 razy.

b) $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\quad \omega_0 = 2\pi f_0$

Zatem początkowy moment pędu układu

$L_0 = I_0 \omega_0 \quad L_0 = \frac{1}{12} l^2 (m+3M) 2\pi f_0$

$L_0 = \frac{\pi}{6} l^2 (m+3M) f_0$

$L = I\omega \quad L = (\frac{1}{12} ml^2 + M(\frac{1}{2}l - x)^2) \frac{2\pi}{T}$

• Korzystając z zasady zachowania momentu pędu

$L_0 = L$

$$\frac{\pi}{6} l^2(m+3M) f_0 = (\frac{1}{12} ml^2 + M(\frac{1}{2}l - x)^2) \frac{2\pi}{T}$$

$$l^2(m+3M) f_0 = (ml^2 + 12M(\frac{1}{2}l - x)^2$$

$$f_0 = \frac{(ml^2 + 12M(\frac{1}{2}l - x)^2)}{l^2(m+3M)} \frac{1}{T}$$

$$f_0 = \frac{0{,}4\,kg \cdot (1{,}2\,m)^2 + 12 \cdot 0{,}84\,kg \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1{,}2\,m - 0{,}2\,m)^2}{(1{,}2\,m)^2 \cdot (0{,}4\,kg + 3 \cdot 0{,}84\,kg)} \cdot \frac{1}{2\,s}$$

$$= \frac{0{,}576\,kg \cdot m^2 + 1{,}8048\,kg \cdot m^2}{4{,}6368\,kg \cdot m^2} \cdot 0{,}5\,\frac{1}{s} \approx$$

$$= \frac{2{,}3808\,kg \cdot m^2}{4{,}6368\,kg \cdot m^2} \cdot 0{,}5\,Hz \approx 0{,}5 \cdot 0{,}5\,Hz = 0{,}25\,Hz$$

c) Początkowa wartość energii kinetycznej ruchu obrotowego układu wynosi:

$E_{k.obr.0} = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$

• Po zmianie położenia przez pająka

$E_{k.obr} = \frac{1}{2} I \omega^2$

- bezwzględny przyrost energii ma postać

$$\Delta E = E_{k.obr} - E_{k.obr.0}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$$

- względny przyrost energii kinetycznej

$$\delta = \frac{\Delta E}{E_{k.obr.0}} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} I_0\omega_0^2}{\frac{1}{2} I_0 \omega_0^2} \cdot 100\%$$

$$\delta = \left(\frac{I\omega^2}{I_0\omega_0^2} - 1 \right) \cdot 100\% = \left(\frac{I}{I_0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right) \cdot 100\%$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{I_0}{I}} \left(\frac{\frac{2\pi}{T}}{2\pi f_0} \right)^2 - 1 \right) \cdot 100\% = \left(\frac{1}{\frac{I_0}{I}} \left(\frac{1}{T f_0} \right)^2 - 1 \right) \cdot 100\%$$

$$\delta \approx \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2\,s \cdot 0{,}25\,Hz} \right)^2 - 1 \right) \cdot 100\% \approx$$

$$\approx \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 - 1 \right) \cdot 100\% \approx (2-1) \cdot 100\% \approx$$

$$\approx 100\%$$