Zadanie 6.8

Człowiek o masie 65 kg stoi na brzegu poziomej nieruchomej tarczy, która może się obracać bez tarcia wokół swojej osi. Masa tarczy jest równa 260 kg, a jej promień ma 2,5 m.

a) Oblicz szybkość kątową, z jaką będzie się obracać tarcza, gdy człowiek zacznie iść wzdłuż jej brzegu z szybkością $1 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ względem niej.

b) Oblicz czas potrzebny człowiekowi na zakreślenie pełnego okręgu względem podłoża, na którym znajduje się tarcza.

c) O jaki kąt obróci się tarcza w tym czasie? Jaka to część kąta pełnego?

d) Wyznacz stosunek szybkości kątowej człowieka do szybkości kątowej tarczy.

zad. 6.3

Dane:

$m = 65\,kg$

$M = 260\,kg$

$R = 2{,}5\,m$

$v = 1\,\frac{m}{s}$

a). Moment pędu przedstawiamy wzorem

$L = J \cdot \omega$

gdzie L jest momentem pędu, J momentem bezwładności, ω szybkością kątową.

Moment bezwładności tarczy obracającej się względem swojej osi symetrii będzie wynosił

$J_t = \frac{1}{2} MR^2$

gdzie M jest masą tarczy, R jest jej promieniem. Traktujemy człowieka, jako punkt materialny na tarczy. Jego moment bezwładności ma postać:

$J_c = mR^2$

Początkowy moment pędu jest zerowy - człowiek i tarcza spoczywają:

$L_0 = 0$

Człowiek zaczyna się poruszać względem tarczy z szybkością kątową ω_c i jednocześnie jest unoszony przez tarczę w przeciwnym kierunku z szybkością kątową ω_t.

Jego moment pędu zapiszemy jako

$L_c = J_c \omega_t - J_c \omega_c$

$v = \omega_c R$

$\omega_c = \frac{v}{R}$

więc:

$L_c = J_c \omega_t - J_c \frac{v}{R}$

Moment pędu obracającej się tarczy wyrazimy jako:

$L_t = J_t \omega_t$

Z zasady zachowania pędu możemy zapisać

$L_0 = L_c + L_t$

$0 = J_c \omega_t - J_c \frac{v}{R} + J_t \omega_t$

Wyznaczamy szybkość kątową z jaką porusza się tarcza:

$J_c \frac{v}{R} = J_c \omega_t + J_t \omega_t$

$\omega_t (J_c + J_t) = J_c \frac{v}{R}$

$\omega_t = \frac{J_c \frac{v}{R}}{J_c + J_t}$

$\omega_t = \frac{mR^2 \cdot \frac{v}{R}}{mR^2 + \frac{1}{2} MR^2}$

$\omega_t = \frac{mvR}{(m + \frac{1}{2} M) R^2}$

$\omega_t = \frac{mv}{(\frac{1}{2} M + m) R}$

Podstawiamy dane

$$\omega_t = \frac{65\,kg \cdot 1\,\frac{m}{s}}{(\frac{1}{2} \cdot 260\,kg + 65\,kg) \cdot 2{,}5\,m} = \frac{65\,kg \cdot \frac{m}{s}}{195\,kg \cdot 2{,}5\,m} = \frac{65\,kg \cdot \frac{m}{s}}{487{,}5\,kg \cdot m} = \frac{1}{7{,}5}\,\frac{rad}{s} = \frac{2}{15}\,\frac{rad}{s} \approx 0{,}13\,\frac{rad}{s}$$

Odp. Szybkość kątowa wynosi $0{,}13\,\frac{rad}{s}$.

b) Zauważmy, że szybkość całkowita z jaką porusza się człowiek względem podłoża jest różnicą szybkości z jaką porusza się po tarczy i szybkości tarczy względem podłoża:
$v_c = v - v_t$

Szybkość tarczy możemy opisać jako:
$v_t = \omega \cdot R$
gdzie ω jest szybkością kątową z jaką porusza się tarcza. Wówczas otrzymujemy, że całkowita szybkość człowieka względem podłoża wynosi:
$v_c = v - v_t$
$v_c = v - \omega \cdot R$

Człowiek porusza się ruchem jednostajnym, dlatego czas jego ruchu możemy przedstawić wzorem:
$t = \frac{s}{v}$
gdzie t jest czasem, s drogą, v szybkością. W naszym przypadku człowiek porusza się po okręgu, dlatego jego droga ruchu wynosi:
$s = 2\pi R$

Z tego wynika, że czas ruchu człowieka w naszym przypadku wynosi:
$t = \frac{s}{v_c}$
$t = \frac{2\pi R}{v - \omega \cdot R}$

Podstawiamy dane
$t = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5\,m}{1\frac{m}{s} - \frac{2}{15}\frac{rad}{s} \cdot 2{,}5\,m} = \frac{15{,}7\,m}{1\frac{m}{s} - \frac{5}{15}\frac{m}{s}} = \frac{15{,}7\,m}{\frac{2}{3}\frac{m}{s}} = \frac{47{,}1\,m}{2\frac{m}{s}} = \frac{471}{20}\,s = 23{,}55\,s \approx 24\,s$

Odp. Potrzebny czas w przybliżeniu wynosi 24 s

c) Kąt o jaki w tym czasie obróci się tarcza obliczamy z wzoru:
$\alpha = \omega \cdot t$
gdzie α jest kątem o jaki obróci się tarcza, ω szybkością kątową, t czasem ruchu. Wówczas otrzymujemy:
$\alpha = \omega \cdot t$
$\alpha = \omega \cdot \frac{2\pi R}{v - \omega \cdot R}$
$\alpha = \omega \cdot \frac{2\pi R}{\omega(\frac{v}{\omega} - R)}$
$\alpha = \frac{2\pi R}{\frac{v}{\frac{mv}{(\frac{1}{2}M + m)R}} - R}$
$\alpha = \frac{2\pi R}{(\frac{v(\frac{1}{2}M + m)}{mv} - 1) \cdot R}$
$\alpha = \frac{2\pi}{\frac{\frac{1}{2}M + m}{m} - 1}$
$\alpha = \frac{2\pi}{\frac{\frac{1}{2}M}{m}}$
$\alpha = \frac{2\pi m}{\frac{1}{2}M}$
$\alpha = 4\pi \frac{m}{M}$

Podstawiamy dane
$\alpha = 4 \cdot \pi \cdot \frac{65\,kg}{260\,kg} = 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi = 180°$

Odp. W tym czasie tarcza obróci się o 180°

d). Szybkość kątowa człowieka względem podłoża wynosi:

$$\omega_p = \frac{v_c}{R}$$

gdzie v_c jest całkowitą szybkością liniową człowieka względem podłoża.

Szybkość kątowa człowieka względem tarczy wynosi

$$\omega_t = \frac{\alpha}{t}$$

Wówczas stosunek szybkości kątowej człowieka względem podłoża do szybkości kątowej człowieka względem tarczy wynosi:

$$\frac{\omega_p}{\omega_t} = \frac{\frac{v_c}{R}}{\frac{\alpha}{t}}$$

$$\frac{\omega_p}{\omega_t} = \frac{v_c}{R} \cdot \frac{t}{\alpha}$$

$$\frac{\omega_p}{\omega_t} = \frac{v - \omega R}{R} \cdot \frac{t}{\alpha}$$

$$\frac{\omega_p}{\omega_t} = \left(\frac{v}{R} - \omega\right) \cdot \frac{t}{\alpha}$$

Podstawiamy dane

$$\frac{\omega_p}{\omega_t} = \left(\frac{1\frac{m}{s}}{2,5\,m} - \frac{2}{15}\frac{rad}{s}\right) \cdot \frac{\frac{471}{20}s}{\pi}$$

$$\frac{\omega_p}{\omega_t} = \left(\frac{6}{15}\frac{rad}{s} - \frac{2}{15}\frac{rad}{s}\right) \cdot \frac{471}{20}s \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{\omega_p}{\omega_t} = \frac{4}{15}\frac{rad}{s} \cdot \frac{471}{20}s \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{\omega_p}{\omega_t} = \frac{1}{15} \cdot \frac{471}{5} \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{\omega_p}{\omega_t} = 6,28 \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{\omega_p}{\omega_t} = \frac{6,28}{3,14}$$

$$\frac{\omega_p}{\omega_t} = 2$$

Odp. Stosunek szybkości kątowej człowieka do szybkości kątowej tarczy wynosi 2.