6.7

Zadanie 6.7

Pozioma tarcza o masie 80 kg obraca się bez oporu ze stałą prędkością kątową wokół pionowej osi przechodzącej przez jej środek. Okres obrotu jest równy 6 s. Na brzegu tarczy stoi człowiek o masie 50 kg.

a) Oblicz wartość prędkości kątowej, z jaką będzie się obracać tarcza, gdy człowiek przejdzie na jej środek. Wynik podaj w radianach na sekundę i w stopniach na sekundę.

b) Oblicz, o ile wzrośnie energia kinetyczna układu, jeśli promień tarczy jest równy 2 m. Jak wyjaśnisz wzrost energii układu?

Dane

$M = 80kg$ $\quad m = 50kg$ $\quad T = 6s$

a) Moment bezwładności tarczy:

$I_t = \frac{1}{2} M R^2$

Moment bezwł. człowieka:

$I_c = m R^2$

Początkowa szybkość kątowa tarczy:

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Początk. moment pędu tarczy:

$L_{t.0} = I_t \omega_0$

Moment pędu człowieka: $L_c = 0$, ponieważ znajduje się na środku tarczy.

Zasada zachowania pędu:

$L_t + L_c = L_{t.0} + L_{c.0}$

$I_t \omega + 0 = I_t \omega_0 + I_c \omega_0 \quad | : I_t$

$\omega = \omega_0 + \frac{I_c}{I_t} \omega_0$

$\omega = \left(1 + \frac{I_c}{I_t}\right) \omega_0$

$\omega = \left(1 + \frac{mR^2}{\frac{1}{2}MR^2}\right) \frac{2\pi}{T}$

$\omega = \left(1 + \frac{2m}{M}\right) \frac{2\pi}{T}$

Wart. liczbowe

$\omega = \left(1 + \frac{2 \cdot 50kg}{80kg}\right) \cdot \frac{2\pi}{6s} = \left(1 + \frac{100kg}{80kg}\right) \cdot \frac{1}{3}\pi \frac{rad}{s} =$

$= (1 + 1,25) \cdot \frac{1}{3}\pi \frac{rad}{s} = 2,25 \cdot \frac{1}{3}\pi \frac{rad}{s} =$

$= 0,75\pi \frac{rad}{s} = 0,75 \cdot 3,14 \frac{rad}{s} = 2,355 \frac{rad}{s} \approx$

$\approx 2,4 \frac{rad}{s}$

b) $R = 2m$

$E_{k.obr.t_0} = \frac{1}{2} I_c \omega_0^2$

Całk. energia początkowa układu

$E_0 = E_{k.obr.t0} + E_{k.obr.c0}$

$E_0 = \frac{1}{2} I_t \omega_0^2 + \frac{1}{2} I_c \omega_0^2$

$E_0 = \frac{1}{2}(I_t + I_c)\omega_0^2$

$E_0 = \frac{1}{2}(I_t + I_c)\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

$E_0 = \frac{1}{2}(I_t + I_c)\frac{4\pi^2}{T^2}$

$E_0 = \frac{2\pi^2(I_t + I_c)}{T^2}$

Energia po przejściu czł.:

$E = E_{k.obr.t} + E_{k.obr.c}$

$E = \frac{1}{2} I_t \omega^2 + 0$

$E = \frac{1}{2} I_t \left(\left(1 + \frac{2m}{M}\right)\frac{2\pi}{T}\right)^2$

$E = \left(1 + \frac{2m}{M}\right)^2 \frac{2\pi^2 I_t}{T^2}$

Zmiana energii układu

$E_0 + \Delta E = E$

$\Delta E = E - E_0$

$\Delta E = \left(1 + \frac{2m}{M}\right)^2 \frac{2\pi^2 I_t}{T^2} - \frac{2\pi^2(I_t + I_c)}{T^2}$

$\Delta E = \frac{2\pi^2}{T^2}\left[\left(1 + \frac{2m}{M}\right)^2 I_t - (I_t + I_c)\right]$

$\Delta E = \frac{2\pi^2}{T^2}\left[\left(\left(1 + \frac{2m}{M}\right)^2 - 1\right)\frac{1}{2}MR^2 - mR^2\right]$

$\Delta E = \frac{2\pi^2}{T^2} \cdot \frac{1}{2}R^2 \left[\left(\left(1 + \frac{2m}{M}\right)^2 - 1\right)M - 2m\right]$

$\Delta E = \frac{\pi^2 R^2}{T^2}\left[\left(\left(1 + \frac{2m}{M}\right)^2 - 1\right)M - 2m\right]$

Dane liczbowe

$\Delta E = \left[\frac{3,14 \cdot 2m}{6s}\right]^2 \cdot \left[\left(\left(1 + \frac{2 \cdot 50kg}{80kg}\right)^2 - 1\right) \cdot 80kg - 2 \cdot 50kg\right] =$

$= \left[\frac{6,28}{6}\right]^2 \cdot \left[\left(\left(1 + \frac{100kg}{80kg}\right)^2 - 1\right) \cdot 80kg - 100kg\right] \approx$

$\approx \left[1,05 \frac{m}{s}\right]^2 \cdot \left[(2,25^2 - 1) \cdot 80kg - 100kg\right] \approx$

$\approx 1,1 \frac{m^2}{s^2} \cdot \left[(5,0625 - 1) \cdot 80kg - 100kg\right] =$

$= 1,1 \frac{m^2}{s^2} \cdot \left[4,0625 \cdot 80kg - 100kg\right] = 1,1 \frac{m^2}{s^2} \cdot \left[325kg - 100kg\right] =$

$= 1,1 \frac{m^2}{s^2} \cdot 225kg = 247,5 kg \cdot \frac{m^2}{s^2} \approx 250 J$