Zadanie 4.11

W celu doświadczalnego wyzwania wyznaczenia momentu bezwładności tzn. wahadła Oberbecka nawinięto na walec cienką nic, na której końcu zaczepiono obciążnik o masie m = 0,2 kg. Przed rozpoczęciem doświadczenie przytrzymano obciążnik. Następnie puszczono go tak, aby rozpoczął ruch z szybkością początkową V_0 = 0, i zmierzono czas, w którym obciążnik przebył drogę h = 1 m. Uzyskano wynik t = 15,5 s. Promień walca, na który nawinięto nić, to R = 2 cm.

a) Wyprowadź wzór, na podstawie którego można obliczyć moment bezwładności wahadła Oberbecka. Skorzystaj z wyniku doświadczenia. Pomiń wszystkie opory.
b) Oblicz moment bezwładności wahadła Oberbecka. Przyjmij, że g =9,81 m/s^2
c) Załóż, że niepewność pomiaru czasu Δt = 0,5 s (a inne wielkości są zmierzone na tyle dokładnie, że ich niepewności można pominąć) i oblicz minimalną oraz maksymalną wartość liczbową momentu bezwładności wahadła, a także niepewność bezwzględną ΔI i względną ΔI/I, z jakimi te wielkości zostały wyznaczone.

a) Korzystając z drugiej zasady dynamiki dla ruchu postępowego przedstawiamy równanie sił działających na obciążnik:

$$\mathbf{ma = F_g - N}$$

gdzie:

- **m** – masa obciążnika,
- **a** – wartość przyspieszenia liniowego, z jakim się porusza,
- $\mathbf{F_g}$ - wartość siły ciężkości zwróconej w dół,
- **N** – wartość siły naciągu nici zwróconej do górę,

Wartość siły ciężkości wygląda tak:

$$\mathbf{F_g = mg}$$

gdzie:

- **m** – masa,
- $\mathbf{g = 9{,}81\ m/s^2}$ – wartość przyspieszenia ziemskiego,

Wyznaczamy wartość siły naciągu nici:

$$ma = F_g - N \quad /+N-ma$$
$$N = F_g - ma$$
$$N = mg - ma$$
$$N = m(g-a)$$

Wiemy jaką drogę przebył walec. Korzystamy z wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$\mathbf{s = \tfrac{1}{2}\, at^2}$$

gdzie:

- **s** – droga, która przebyło ciało,
- **a** – wartość przyspieszenia ciała,
- **t** – czas ruchu,

Wyznaczamy przyspieszenie:

$$\frac{1}{2}at^2 = h \quad /\cdot 2$$
$$at^2 = 2h$$
$$a = \frac{2h}{t^2}$$

Moment siły ma wzór:

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{N}$$

gdzie:

- **M** – moment siły,
- **r** – odległość między punktem przyłożenia siły, a osią obrotu,
- **F** – siła,

Wektor siły jest prostopadły do wektora odległości, a siłą, która powoduję ruch walca jest siła naciągu nici, czyli:

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{N}$$
$$M = RN \sin 90^\circ$$
$$M = NR$$

Korzystając z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego otrzymujemy:

$$\mathbf{I * \varepsilon = M}$$

gdzie:

- I – moment bezwładności,
- Ɛ – wartość przyspieszenia kątowego,
- M – wartość momentu siły,

Przyspieszenie kątowe ma wzór:

$$\mathbf{\varepsilon = a/R}$$

gdzie:

- Ɛ – wartość przyspieszenia kątowego,
- a – wartość przyspieszenia liniowego,
- R – promień,

Wyznaczamy moment bezwładności:

$$J \cdot \varepsilon = M$$
$$J \cdot \varepsilon = N \cdot R$$
$$J \cdot \frac{a}{R} = N \cdot R \quad / \cdot R$$
$$J \cdot a = N \cdot R^2$$
$$J \cdot a = m(g-a)R^2$$
$$J \cdot a = mR^2(g-a)$$
$$J = mR^2 \frac{g-a}{a}$$
$$J = mR^2\left(\frac{g}{a} - 1\right)$$
$$J = mR^2\left(\frac{g}{\frac{2h}{t^2}} - 1\right)$$
$$J = mR^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right)$$

b) Podstawiamy dane do wzoru:

$$J = 0{,}2\,kg \cdot (0{,}02\,m)^2 \cdot \left(\frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot (15{,}5)^{s}}{2 \cdot 1\,m} - 1\right) = 0{,}2\,kg \cdot 0{,}0004\,m^2 \cdot \left(\frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 240{,}25\,s^2}{2\,m} - 1\right)$$
$$= 0{,}00008\,kg \cdot m^2 \cdot \left(\frac{2356{,}8525\,m}{2\,m} - 1\right) = 0{,}00008\,kg \cdot m^2 \cdot (1178{,}42625 - 1)$$
$$= 0{,}00008\,kg \cdot m^2 \cdot 1177{,}42625 = 0{,}0941941\,kg \cdot m^2 \approx \underline{\underline{0{,}094\,kg \cdot m^2}}$$

Odp.: Moment bezwładności wahadła wynosi ok. 0,094 kg*m^2.

c) $\Delta t = 0{,}5\ s$

więc:

$t_{min} = t - \Delta t$, czyli $t_{min} = 15{,}5\ s - 0{,}5\ s = 15\ s$

$t_{max} = t + \Delta t$, czyli $t_{max} = 15{,}5\ s + 0{,}5\ s = 16\ s$

Wówczas:

$$I_{min} = I = mR^2\left(\frac{g t_{min}^2}{2h} - 1\right)$$

$$I_{max} = I = mR^2\left(\frac{g t_{max}^2}{2h} - 1\right)$$

Podstawiamy dane do wzoru:

$$I_{min} = 0{,}2\,kg \cdot (0{,}02)^2 \cdot \left(\frac{9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot (15s)^2}{2 \cdot 1m} - 1\right) = 0{,}2\,kg \cdot 0{,}0004\,m^2 \cdot \left(\frac{9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 225\,s^2}{2m} - 1\right) =$$

$$= 0{,}00008\,kg \cdot m^2 \cdot \left(\frac{2207{,}25\,m}{2m} - 1\right) = 0{,}00008\,kg \cdot m^2 \cdot (1103{,}625 - 1) =$$

$$= 0{,}00008\,kg \cdot m^2 \cdot 1102{,}625 = 0{,}08821\,kg \cdot m^2 \approx \underline{\underline{8{,}8 \cdot 10^{-2}\,kg \cdot m^2}}$$

$$I_{max} = 0{,}2\,kg \cdot (0{,}02m)^2 \cdot \left(\frac{9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot (16s)^2}{2 \cdot 1m} - 1\right) = 0{,}2\,kg \cdot 0{,}0004\,m^2 \cdot \left(\frac{9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 256\,s^2}{2m} - 1\right) =$$

$$= 0{,}00008\,kg \cdot m^2 \cdot \left(\frac{2511{,}36\,m}{2m} - 1\right) = 0{,}00008\,kg \cdot m^2 \cdot (1255{,}68 - 1) =$$

$$= 0{,}00008\,kg \cdot m^2 \cdot 1254{,}68 = 0{,}1003744\,kg \cdot m^2 \approx \underline{\underline{10 \cdot 10^{-2}\,kg \cdot m^2}}$$

Obliczamy niepewność bezwzględną:

$$\Delta J = \frac{J_{max} - J_{min}}{2}$$

$$\Delta J = \frac{10{,}04 \cdot 10^{-2} kg \cdot m^2 - 8{,}82 \cdot 10^{-2} kg \cdot m^2}{2} = \frac{1{,}22 \cdot 10^{-2} kg \cdot m^2}{2} = 0{,}6 \cdot 10^{-2} kg \cdot m^2$$

Z tego wynika, że:

$$J = (9{,}4 \pm 0{,}6) \cdot 10^{-2} kg \cdot m^2$$

Obliczamy niepewność względną:

$$\delta = \frac{\Delta J}{J} \cdot 100\%$$

$$\delta = \frac{0{,}6 \cdot 10^{-2} kg \cdot m^2}{9{,}4 \cdot 10^{-2} kg \cdot m^2} \cdot 100\% \approx 0{,}0638 \cdot 100\% = 6{,}38\%$$

Odp.: Minimalna wartość momentu bezwładności wynosi 8,8 * 10^{-2} kg*m^2, maksymalna wartość – 10 * 10^{-2} kg * m^2, niepewność bezwzględna wynosi 0,6 * 10^{-2} kg * m^2, niepewność względna wynosi 6,38%.