

Zadanie 4.11

W celu doświadczalnego wyznaczenia momentu bezwładności tzn. wahadła Oberbecka nawinięto na walec cienką nici, na której końcu zaczepiono obciążnik o masie $m = 0,2 \text{ kg}$. Przed rozpoczęciem doświadczenia przytrzymano obciążnik. Następnie puszczono go tak, aby rozpoczął ruch z szybkością początkową $V_0 = 0$, i zmierzono czas, w którym obciążnik przebył drogę $h = 1 \text{ m}$. Uzyskano wynik $t = 15,5 \text{ s}$. Promień walca, na który nawinięto nić, to $R = 2 \text{ cm}$.

- Wyprowadź wzór, na podstawie którego można obliczyć moment bezwładności wahadła Oberbecka. Skorzystaj z wyniku doświadczenia. Pomiń wszystkie opory.
- Oblicz moment bezwładności wahadła Oberbecka. Przyjmij, że $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- Załóż, że niepewność pomiaru czasu $\Delta t = 0,5 \text{ s}$ (a inne wielkości są zmierzone na tyle dokładnie, że ich niepewności można pominąć) i oblicz minimalną oraz maksymalną wartość liczbową momentu bezwładności wahadła, a także niepewność bezwzględną ΔI i względną $\Delta I/I$, z jakimi te wielkości zostały wyznaczone.

a) Korzystając z drugiej zasady dynamiki dla ruchu postępowego przedstawiamy równanie sił działających na obciążnik:

$$ma = F_g - N$$

gdzie:

- m – masa obciążnika,
- a – wartość przyspieszenia liniowego, z jakim się porusza,
- F_g - wartość siły ciężkości zwróconej w dół,
- N – wartość siły naciągu nici zwróconej do góry,

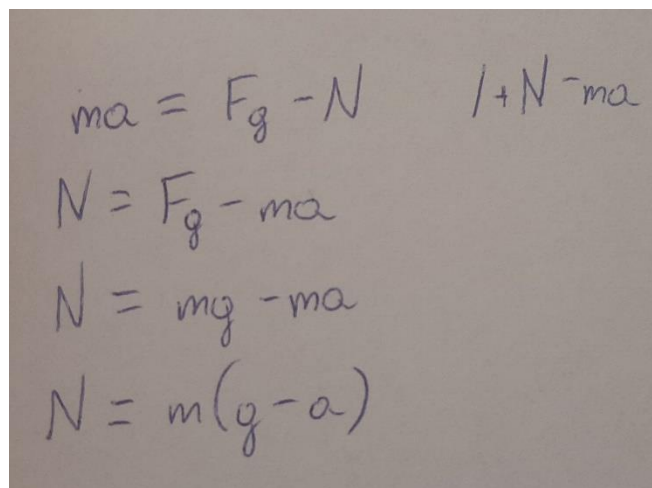
Wartość siły ciężkości wygląda tak:

$$F_g = mg$$

gdzie:

- m – masa,
- $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ – wartość przyspieszenia ziemskiego,

Wyznaczamy wartość siły naciągu nici:



Handwritten derivation of the normal force equation:

$$ma = F_g - N \quad | +N - ma$$
$$N = F_g - ma$$
$$N = mg - ma$$
$$N = m(g - a)$$

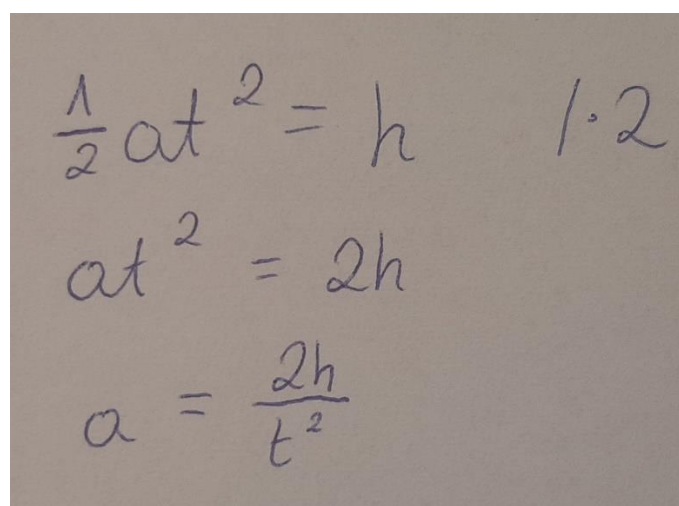
Wiemy jaką drogę przebył walec. Korzystamy z wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$s = \frac{1}{2} at^2$$

gdzie:

- **s** – droga, która przebyło ciało,
- **a** – wartość przyspieszenia ciała,
- **t** – czas ruchu,

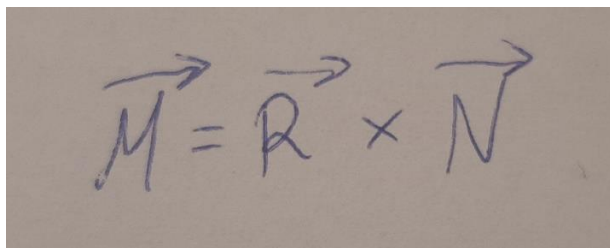
Wyznaczamy przyspieszenie:



Handwritten derivation of the acceleration equation:

$$\frac{1}{2} at^2 = h \quad | \cdot 2$$
$$at^2 = 2h$$
$$a = \frac{2h}{t^2}$$

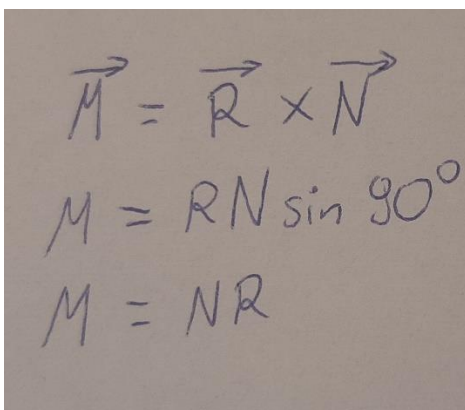
Moment siły ma wzór:


$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{N}$$

gdzie:

- **M** – moment siły,
- **r** – odległość między punktem przyłożenia siły, a osią obrotu,
- **F** – siła,

Wektor siły jest prostopadły do wektora odległości, a siłą, która powodują ruch walca jest siła naciągu nici, czyli:


$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{R} \times \vec{N} \\ M &= RN \sin 90^\circ \\ M &= NR\end{aligned}$$

Korzystając z drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego otrzymujemy:

$$I * \epsilon = M$$

gdzie:

- **I** – moment bezwładności,
- **ϵ** – wartość przyspieszenia kąowego,
- **M** – wartość momentu siły,

Przyspieszenie kątowe ma wzór:

$$\epsilon = a/R$$

gdzie:

- ε – wartość przyspieszenia kąowego,
- a – wartość przyspieszenia liniowego,
- R – promień,

Wyznaczamy moment bezwładności:

$$\begin{aligned} J \cdot \varepsilon &= M \\ J \cdot \varepsilon &= N \cdot R \\ J \cdot \frac{a}{R} &= N \cdot R \quad | \cdot R \\ J \cdot a &= N \cdot R^2 \\ J \cdot a &= m(g-a)R^2 \\ J \cdot a &= mR^2(g-a) \\ J &= mR^2 \frac{g-a}{a} \\ J &= mR^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) \\ J &= mR^2 \left(\frac{g}{\frac{2h}{t^2}} - 1 \right) \\ J &= mR^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \end{aligned}$$

b) Podstawiamy dane do wzoru:

$$\begin{aligned} J &= 0,2 \text{ kg} \cdot (0,02 \text{ m})^2 \cdot \left(\frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (15,5)^2}{2 \cdot 1 \text{ m}} - 1 \right) = 0,2 \text{ kg} \cdot 0,0004 \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 240,25 \text{ s}^2}{2 \text{ m}} - 1 \right) \\ &= 0,00008 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \left(\frac{2356,8525 \text{ m}}{2 \text{ m}} - 1 \right) = 0,00008 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (1178,42625 - 1) \\ &= 0,00008 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 1177,42625 = 0,0941941 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \approx \underline{\underline{0,094 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}} \end{aligned}$$

Odp.: Moment bezwładności wahadła wynosi ok. $0,094 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

c) $\Delta t = 0,5 \text{ s}$

więc:

$$t_{\min} = t - \Delta t, \text{ czyli } t_{\min} = 15,5 \text{ s} - 0,5 \text{ s} = 15 \text{ s}$$

$$t_{\max} = t + \Delta t, \text{ czyli } t_{\max} = 15,5 \text{ s} + 0,5 \text{ s} = 16 \text{ s}$$

Wówczas:

$$J_{\min} = J = mR^2 \left(\frac{gt_{\min}^2}{2h} - 1 \right)$$
$$J_{\max} = J = mR^2 \left(\frac{gt_{\max}^2}{2h} - 1 \right)$$

Podstawiamy dane do wzoru:

$$J_{\min} = 0,2 \text{ kg} \cdot (0,02 \text{ m})^2 \cdot \left(\frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (15 \text{ s})^2}{2 \cdot 1 \text{ m}} - 1 \right) = 0,2 \text{ kg} \cdot 0,0004 \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 225 \text{ s}^2}{2 \text{ m}} - 1 \right) =$$
$$= 0,00008 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \left(\frac{2207,25 \text{ m}}{2 \text{ m}} - 1 \right) = 0,00008 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (1103,625 - 1) =$$
$$= 0,00008 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 1102,625 = 0,8821 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \approx \underline{\underline{8,8 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}}$$

$$J_{\max} = 0,2 \text{ kg} \cdot (0,02 \text{ m})^2 \cdot \left(\frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (16 \text{ s})^2}{2 \cdot 1 \text{ m}} - 1 \right) = 0,2 \text{ kg} \cdot 0,0004 \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 256 \text{ s}^2}{2 \text{ m}} - 1 \right) =$$
$$= 0,00008 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \left(\frac{2511,36 \text{ m}}{2 \text{ m}} - 1 \right) = 0,00008 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot (1255,68 - 1) =$$
$$= 0,00008 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 1254,68 = 0,1003744 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \approx \underline{\underline{10 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}}$$

Obliczamy niepewność bezwzględną:

$$\Delta J = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2}$$
$$\Delta J = \frac{10,04 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 - 8,82 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{2} = \frac{1,22 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{2} = 0,6 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Z tego wynika, że:

$$J = (8,4 \pm 0,6) \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Obliczamy niepewność względną:

$$\delta = \frac{\Delta J}{J} \cdot 100\%$$
$$\delta = \frac{0,6 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{8,4 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \cdot 100\% \approx 0,0638 \cdot 100\% = 6,38\%$$

Odp.: Minimalna wartość momentu bezwładności wynosi $8,8 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, maksymalna wartość – $10 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, niepewność bezwzględna wynosi $0,6 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, niepewność względna wynosi 6,38%.