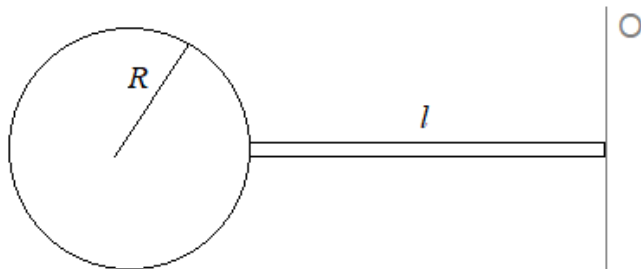


3.5

$m_k = 2m_p$, masa kuli dwa razy większa od masy pręta.

$l = 4R$, długość pręta dwa razy większa od promienia kuli.

a)



$$I_u = I_p + I_k$$

Moment bezwładności tego układu będzie sumą momentów bezwładności jego elementów, czyli pręta i kuli.

Policzę moment bezwładności kuli. Skorzystam z twierdzenia Steinera, ponieważ oś obrotu nie przechodzi przez środek kuli:

$$I_k = I_0 + m_k d^2$$

Podstawowy moment bezwładności kuli odczytany z tablic to $I_0 = \frac{2}{5} m_k R^2$

Oś obrotu jest przesunięta o $d = l + R = 5R$ od środka kuli.

Moment bezwładności kuli to więc:

$$I_k = \frac{2}{5} m_k R^2 + m_k (5R)^2 = \frac{2}{5} m_k R^2 + 25 m_k R^2 = m_k R^2 \left(\frac{2}{5} + 25 \right)$$

Wzór na moment bezwładności pręta o osi obrotu przechodzącej przez jeden z jego końców można odczytać z tablic i wynosi $I_p = \frac{1}{3} m_p l^2$

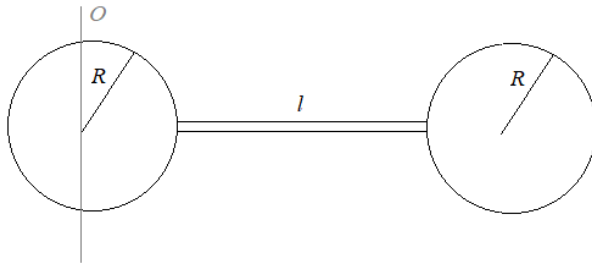
Po wyrażeniu masy pręta przez masę kuli i długości pręta przez promień kuli wzór przyjmuje postać:

$$I_p = \frac{8}{3} m_k R^2$$

Łączny moment bezwładności układu:

$$I_u = I_k + I_p = m_k R^2 \left(\frac{2}{5} + 25 \right) + \frac{8}{3} m_k R^2 = m_k R^2 \left(\frac{2}{5} + 25 + \frac{8}{3} \right) = \frac{421}{15} m_k R^2$$

b)



Podpunkt b) rozwiązać można analogicznie. Całkowity moment bezwładności układu to:

$$I_u = I_{k_1} + I_{k_2} + I_p$$

Moment bezwładności kuli pierwszej: $I_{k_1} = \frac{2}{5} m_k R^2$, ponieważ oś obrotu przechodzi przez jej środek.

Moment bezwładności kuli drugiej, z twierdzenia Steinera: $I_{k_2} = \frac{2}{5} m_k R^2 + m_k (6R)^2$, ponieważ oś obrotu leży na odległości $6R$ od jej środka. Po uproszczeniu otrzymuję, że $I_{k_2} = m_k R^2 \left(\frac{2}{5} + 36 \right)$

Moment bezwładności pręta o osi przechodzącej przez jego środek wyraża się wzorem $I_p = \frac{1}{12} m_p l^2$. Oś jest jednak przesunięta o $3R$ od środka. Z twierdzenia Steinera:

$$I_p = \frac{1}{12} m_p l^2 + m_p (3R)^2$$

Po wyrażeniu wielkości pręta przez wielkości kuli i uproszczeniu wzór przyjmuje postać:

$$I_p = m_k R^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{9}{2} \right)$$

Całkowity moment bezwładności:

$$I_u = I_{k_1} + I_{k_2} + I_p = \frac{2}{5} m_k R^2 + m_k R^2 \left(\frac{2}{5} + 36 \right) + m_k R^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{9}{2} \right) = m_k R^2 \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{9}{2} + 36 \right)$$

Po dodaniu ułamków, wzór upraszcza się do postaci:

$$I_u = \frac{1259}{30} m_k R^2$$

Oliwier Moskalewicz