Zadanie 16.9

Pewna planeta ma promień równy promieniowi Ziemi (R = 6400 km), a gęstość 1,6 razy mniejsza od gęstości Ziemi. Załóż, że planeta nie ma atmosfery. Oblicz:

a) Szybkość, którą osiągnie na powierzchni planety ciało spadające swobodnie z wysokości równej połowie jej promienia (przyjmij, ze iloczyn stałej grawitacji i masy Ziemi jest równy $4 * 10^{14}$ m^3/s^2),
b) Wysokość, na którą wzniesie się ciało wyrzucone pionowo z powierzchni planety z szybkością równą połowie wartości pierwszej prędkości kosmicznej.

<u>Dane:</u>

R = 6400 km = $6{,}4 * 10^3$ km = $6{,}4 * 10^6$ m

$\boldsymbol{\rho_p} = \frac{1}{1{,}6}\rho_Z$

$\mathbf{GM_Z} = 4 * 10^{14}$ m^3/s^2

a) Ciało swobodnie spada z wysokości równej połowie promienia tej planety:

$$\mathbf{h = ½\ R}$$

Wiec na tej wysokości jego energia kinetyczna jest równa zero $E_{k.h} = 0$, a energia potencjalna ma wartość:

….

gdzie:

G - to stała grawitacji

$\mathbf{M_p}$ – masa tej planety

m – masa spadającego ciała

Z treści wiemy, że gęstość tej planety jest 1,6 razy mniejsza od gęstości Ziemi, więc:

$$\mathbf{M_p = \frac{1}{1,6}M_Z}$$

Wówczas:

$$E_{p.h} = -\frac{GM_p m}{R+h}$$

$$E_{p.h} = -\frac{G \cdot \frac{1}{1,6} M_z m}{R + \frac{1}{2}R}$$

$$E_{p.h} = -\frac{\frac{1}{1,6} GM_z m}{\frac{3}{2}R}$$

$$E_{p.h} = -\frac{2GM_z m}{1,6 \cdot 3R}$$

$$E_{p.h} = -\frac{2GM_z m}{4,8R}$$

$$E_{p.h} = -\frac{20}{48}\frac{GM_z m}{R}$$

$$E_{p.h} = -\frac{5}{12}\frac{GM_z m}{R}$$

Na powierzchni Ziemi energia potencjalna tego ciał ma postać:

$$E_{p.0} = -\frac{GM_p m}{R}$$

$$E_{p.0} = -\frac{G\frac{1}{1,6}M_z m}{R}$$

$$E_{p.0} = -\frac{10}{16}\frac{GM_z m}{R}$$

$$E_{p.0} = -\frac{5}{8}\frac{GM_z m}{R}$$

Energia kinetyczna ma postać:

$$\mathbf{E_{k.0} = mv^2/2}$$

Z zasady zachowania energii możemy wyznaczyć szybkość, z jaką ciało uderzyło w planetę:

$$E_{k.0} + E_{p.0} = E_{k.h} + E_{p.h}$$

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{5}{8}\frac{GM_z m}{R} = 0 - \frac{5}{12}\frac{GM_z m}{R} \quad | \cdot 2$$

$$v^2 - \frac{5}{4}\frac{GM_z}{R} = -\frac{5}{6}\frac{GM_z}{R}$$

$$v^2 = -\frac{5}{6}\frac{GM_z}{R} + \frac{5}{4}\frac{GM_z}{R}$$

$$v^2 = -\frac{10}{12}\frac{GM_z}{R} + \frac{15}{12}\frac{GM_z}{R}$$

$$v^2 = \frac{5}{12}\frac{GM_z}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{5}{12}\frac{GM_z}{R}}$$

Podstawiamy dane:

$$V = \sqrt{\frac{5}{12} \cdot \frac{4 \cdot 10^{14}\,\frac{m^3}{s^2}}{6{,}4 \cdot 10^6\,m}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10^{14}\,\frac{m^3}{s^2}}{76{,}8 \cdot 10^6\,m}} \approx \sqrt{0{,}26 \cdot 10^8\,\frac{m^2}{s^2}} \approx 0{,}51 \cdot 10^4\,\frac{m}{s} = \underline{5{,}1\,\frac{km}{s}}$$

b) Na powierzchni Ziemi energia potencjalna tego ciała ma postać :

$$E_{p.0} = -\frac{5}{8}\frac{GM_z m}{R}$$

Ciało wyrzucamy z powierzchni planety z szybkością równa połowie pierwszej prędkości kosmicznej dla tej planety:

$$V = \frac{1}{2} V_I$$

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM_p}{R}}$$

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G \cdot \frac{1}{1{,}6} M_z}{R}}$$

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{16}\frac{GM_z}{R}}$$

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{8}\frac{GM_z}{R}}$$

Zatem energia kinetyczna ma postać:

$$E_{k.0} = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_{k.0} = \frac{m\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{8}\frac{GM_z}{R}}\right)^2}{2}$$

$$E_{k.0} = \left(m\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}\frac{GM_z}{R}}{2}\right)$$

$$E_{k.0} = \frac{\frac{5}{32}\frac{GM_z m}{R}}{2}$$

$$E_{k.0} = \frac{5}{64}\frac{GM_z m}{R}$$

Ciało wznosi się na pewna wysokość maksymalną **h**. Wówczas na tej wysokości jego energia kinetyczna jest zerowa $E_{k.h} = 0$, a energia potencjalna ma wartość:

$$E_{p.h} = -\frac{GM_p m}{R+h}$$

$$E_{p.h} = -\frac{G\cdot\frac{1}{1{,}6}M_z m}{R+h}$$

$$E_{p.h} = -\frac{5}{8}\frac{GM_z m}{R+h}$$

Z zasady zachowania energii wyznaczamy wysokość, na jaką wzniosło się ciało:

$$E_{k.0} + E_{p.0} = E_{k.h} + E_{p.h}$$

$$\frac{5}{64}\frac{GM_z \cancel{m}}{R} - \frac{5}{8}\frac{GM_z m}{R} = 0 - \frac{5}{8}\frac{GM_z \cancel{m}}{R+h}$$

$$5\frac{GM_z}{R} - 40\frac{GM_z}{R} = -40\frac{GM_z}{R+h}$$

$$-35\frac{\cancel{GM_z}}{R} = -40\frac{\cancel{GM_z}}{R+h}$$

$$\frac{35}{R} = \frac{40}{R+h}$$

$$35R + 35h = 40R$$

$$35h = 5R$$

$$h = \frac{1}{7}R$$

$$h = \frac{1}{7}\cdot 6400\,km$$

$$\boxed{h \approx 914\,km}$$