zad. 16.6

Oblicz minimalną wartość prędkości, jaką należy nadać ciału na powierzchni Marsa, aby wzniosło się ono na odległość dwóch promieni planety od jej powierzchni. Przyjmij, że masa Marsa $M_M = 0,107 M_Z$, a promień Marsa $R_M = 0,533 R_Z$. Wartość pierwszej prędkości kosmicznej dla Ziemi jest równa $7,9 \frac{km}{s}$.

Dane:

$M_M = 0,107\ M_Z$

$R_M = 0,533\ R_Z$

$v_1 = 7,9 \frac{km}{s}$

Szukane:

$v = ?$

Wzór na energię potencjalną:

$$E_p = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

gdzie G jest stałą grawitacyjną, M jest masą planety, m jest masą ciała, r jest odległością ciała od planety.

W tym przypadku ciało wzniosło się na odległość dwóch promieni planety, czyli:

$$r = R_M + 2R_M$$

$$r = 3R_M$$

Ep dla Marsa na pewnej odległości przedstawiamy wzorem:

$$E_{p_1} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{3R_m}$$

Ep Marsa na jego powierzchni przedstawimy wzorem:

$$E_{p_2} = -G \cdot \frac{M_M \cdot m}{R_M}$$

zaś energia kinetyczna:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

gdzie E_k jest energią kinetyczną ciała o masie m poruszającego się z prędkością v.

Korzystając z zasady zachowania energii otrzymujemy równanie, z którego wyznaczamy prędkość jaką należy nadać ciału:

$$E_k + E_{p_2} = E_{p_1}$$

$$\frac{mv^2}{2} - G \cdot \frac{M_M \cdot m}{R_M} = -G \cdot \frac{M_M \cdot m}{3R_M} \quad \Big/ + G \cdot \frac{M_M \cdot m}{R_M}$$

$$\frac{mv^2}{2} = -G \cdot \frac{M_M \cdot m}{3R_M} + G \frac{M_M \cdot m}{R_M} \quad \Big/ : m$$

$$\frac{v^2}{2} = -G \cdot \frac{M_M}{3R_M} + G \frac{3M_M}{3R_M}$$

$$\frac{v^2}{2} = G \cdot \frac{2M_M}{3R_M}$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{2}{3} \cdot G \cdot \frac{M_M}{R_M} \quad \Big/ \cdot 2$$

$$v^2 = G \cdot \frac{4M_M}{3R_M}$$

$$v^2 = \frac{4}{3} G \cdot \frac{M_M}{R_M}$$

$$v^2 = \frac{4}{3} G \cdot \frac{0{,}107 M_Z}{0{,}533 R_Z}$$

$$v^2 \approx \frac{4}{3} G \cdot 0{,}2 \cdot \frac{M_Z}{R_Z}$$

$$v^2 \approx 0{,}2667 \cdot G \cdot \frac{M_Z}{R_Z}$$

$$v = \sqrt{0{,}266667 \cdot \frac{G \cdot M_z}{R_z}}$$

$$v = \sqrt{0{,}266667} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_z}{R_z}}$$

$$v \approx 0{,}5164 \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_z}{R_z}}$$

Wzór na pierwszą prędkość kosmiczną:

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M_z}{R_z}}$$

, więc

$$v \approx 0{,}5164 \cdot v_1$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$v \approx 0{,}5164 \cdot 7{,}9\,\frac{km}{s} = 4{,}07956\,\frac{km}{s} \approx \underline{4{,}1\,\frac{km}{s}}$$

odp. Minimalna wartość prędkości, jaką należy nadać ciału na powierzchni Marsa, aby wzniosło się ono na odległość dwóch promieni planety od jej powierzchni wynosi $4{,}1\,\frac{km}{s}$.