16.11

Rakieta wystartowała z Ziemi w kierunku pionowym. Gdy znalazła się w odległości $2R_Z$ od tej powierzchni (R_Z - promień Ziemi) nastąpiła awaria silnika. Rakieta oddaliła się na odległość $20R_Z$ od powierzchni Ziemi, po czym zaczęła spadać. Przyjmij następujące wartości $R_Z = 6400\,km$, $GM_Z = 4\cdot 10^{14}\,m^3/s^2$

Oblicz

a) szybkość rakiety w chwili której nastąpiła awaria silnika

$$E_{pg} = -\frac{G\cdot M\cdot m}{r}$$

R = odległość ciała od środka planety

$$E_{pg1} = -\frac{G M_Z m}{R} = -\frac{a\cdot m}{R}$$

$$E_{pg2} = -\frac{G M_Z m}{R+h} = \frac{a\cdot m}{R+2R} = \frac{am}{3R}$$

W miejscu awarii

$$E_{pg3} = -\frac{G M_Z m}{R+H} = \frac{am}{21R}$$

w miejscu spadania

$$E_{pg4} = -\frac{G M_Z m}{R+d} = -\frac{am}{R+d}$$

wysokość d nad ziemią

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_{k1} = 0 \quad E_{k2} = \frac{mv^2}{2} \quad E_{k3} = 0 \quad E_{k4} = \frac{mv^2}{2}$$

Zasada zachowania energii

$$E_{p2} + E_{k2} = E_{p3} + E_{k3}$$

$$-\frac{am}{3R} + \frac{mv^2}{2} = \frac{-a\cdot m}{21R} \;\Big/ + \frac{a\cdot m}{3R} \;\Big/ :m$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{-a}{21R} + \frac{a}{3R}$$

$$v^2 = \frac{12}{21}\cdot\frac{a}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{12}{21}\cdot\frac{a}{R}}$$

podstawiamy

$$v = \sqrt{\frac{12}{21}\cdot\frac{4\cdot 10^{14}}{6{,}4\cdot 10^{6}}} \approx 6\,km/s$$

b) $E_{p4} + E_{k4} = E_{p3} + E_{k3}$

$$-\frac{am}{R+d} + \frac{mv^2}{2} = \frac{-am}{21R} \;\Big/ + \frac{am}{R+d} \;\Big/ :m \;\Big/ \cdot 2$$

$$v^2 = 2a\left(\frac{-1}{21R} + \frac{1}{R+d}\right)$$

$$v^2 = 2a\,\frac{20R - d}{21R(R+d)}$$

$$v = \sqrt{2a\,\frac{20R-d}{21R(R+d)}}$$

podstawiamy

$$v = \sqrt{2\cdot 4\cdot 10^{14}\,\frac{m^3}{s^2}\cdot\frac{20\cdot 6{,}4\cdot 10^6 m - 2\cdot 10^5 m}{21\cdot 6{,}4\cdot 10^6 m\cdot(6{,}4\cdot 10^6 m + 0{,}2\cdot 10\cdot 10^5)}}$$

$$v \approx 10{,}7\,\frac{km}{s}$$