

zad. 15.5 / str. 56

Potencjał pola grawitacyjnego w punkcie oddalonym od powierzchni Merkurgo o $r = R_M$ wynosi $-4,5 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$. Oblicz średnią gęstość planety, wiedząc że jej promień $R_M = 2440 \text{ km}$. Brakujące dane odczytaj z tablic.

D: $r = R_M$

$$V = -4,5 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$R_M = 2440 \text{ km} = 2440 \cdot 10^3 \text{ m} = 2,44 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Sz: $d = ?$

Szukamy średniej gęstości Merkurgo. Zgodnie z definicją mamy:

$$d = \frac{M}{\text{Obj.}}$$

d - gęstość

M - masa ciała

Obj. - objętość ciała

Nie mamy podanej masy ani objętości planety. Znamy natomiast potencjał pola w danym punkcie. Potencjał pola grawitacyjnego w danym punkcie tego pola przedstawiamy zależnością:

$$V = - \frac{GM}{r}$$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ - stała grawitacji

M - masa ciała, będącego źródłem pola grawitacyjnego

r - odległość punktu od środka masy wytwarzającej pole grawitacyjne

My mamy podaną odległość od powierzchni Merkurgo. Oznacza to, że masę Merkurgo możemy przedstawić zależnością:

$$- \frac{GM}{R_M + r} = V$$

$$- \frac{GM}{R_M + R_M} = V$$

$$- \frac{GM}{2R_M} = V \quad | \cdot (-2R_M)$$

$$GM = -2VR_M$$

$$M = - \frac{2VR_M}{G}$$

Przyjmijmy, że Merkurz jest kulą. Wówczas jego objętość możemy przedstawić zależnością:

$$\text{Obj.} = \frac{4}{3} \pi R_M^3$$

W takim razie średnia gęstość Merkurgo będzie miała postać:

$$d = \frac{M}{\text{Obj.}}$$

$$d = \frac{- \frac{2VR_M}{G}}{\frac{4}{3} \pi R_M^3}$$

$$d = \frac{2VR_M}{G} \cdot \frac{3}{4\pi R_M^3}$$

$$d = - \frac{3V}{2\pi G R_M^2}$$

Podstawiamy
dane liczbowe $\rightarrow$

$$d = - \frac{3 \cdot (-4,5 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}})}{2 \cdot 3,14 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot (2,44 \cdot 10^6 \text{ m})^2}$$

$$d = \frac{13,5 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}}{2 \cdot 3,14 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,9536 \cdot 10^{12} \text{ m}^2}$$

$$d = \frac{13,5 \cdot 10^6 \cdot \frac{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\text{kg}}}{249,320154 \cdot 10 \frac{\text{m}^2}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}}$$

$$d = \frac{13500 \cdot 10^3 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2493,20154 \frac{\text{m}^2}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}}$$

$$d \approx 5,4 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$d = 5400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Odp. Średnia gęstość Merkurgo wynosi ok. $5400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$