

Zadanie 11.11.

Oszacuj masę Jowisza, jeśli wiadomo, że jeden z jego 11 dużych satelitów - kalisto okrąża planetę w odległości 1880 000 km od jej środka. Okres obiegu satelity wynosi około 16,5 dnia ziemskiego

Dane:

$$r = 1880000 \text{ km} = 1,88 \cdot 10^6 \text{ km} \\ = 1,88 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \text{ m} = 1,88 \cdot 10^9 \text{ m}$$

$$T = 16,5 \text{ dnia} = 16,5 \cdot 24 \text{ h} = 396 \text{ h} \\ = 1425600 \text{ s} = 1,4256 \cdot 10^6 \text{ s}$$

Przyjmujemy:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

Szukane:

$$m_J = ? \\ (\text{masa Jowisza})$$

Wzory:

$$v = \omega r \quad (\text{prędkość liniowa})$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{szybkość kątowa})$$

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = \frac{G \cdot m_c \cdot m_J}{r^2} \quad (\text{siła grawitacji})$$

w tym przypadku: $F_g = G \cdot \frac{m_c \cdot m_J}{r^2}$ (masa kalisto / masa Jowisza)

$$F_d = \frac{m v^2}{r} \quad (\text{siła dośrodkowa})$$

$$F_d = \frac{m_c v^2}{r}$$

Kalisto porusza się po orbicie Jowisza więc:

$$F_g = F_d \\ G \cdot \frac{m_c \cdot m_J}{r^2} = \frac{m_c v^2}{r} \quad | \cdot r^2$$

$$G \cdot m_c \cdot m_J = m_c v^2 r \quad | : G m_c \\ m_J = \frac{v^2 r}{G}$$

$$m_J = \frac{(\omega r)^2 r}{G}$$

$$m_J = \frac{\omega^2 r^3}{G}$$

$$m_J = \frac{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r^3}{G}$$

$$m_J = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G}$$

$$m_J = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G}$$

Podstawiamy

$$m_J = \frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot (1,88 \cdot 10^9 \text{ m})^3}{(1,4256 \cdot 10^6 \text{ s})^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}} \\ = \frac{4 \cdot 9,8596 \cdot 6,644672 \cdot 10^{27} \text{ m}^3}{2,03233536 \cdot 10^{12} \text{ s}^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}} \\ \approx \frac{262,055 \cdot 10^{27} \text{ m}^3}{13,5557 \cdot 10^{12-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} \\ = \frac{262,055 \cdot 10^{27} \text{ m}^3}{13,5557 \cdot 10 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} \\ = \frac{262,055 \cdot 10^{27} \text{ m}^3}{135,557 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}} \\ \approx 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$